

四庫全書

子部

欽定四庫全書

子部  
歷算全書卷五十八

詳校官欽天監天文生臣司徒棟

靈臺郎臣倪廷梅覆勘

總校官編修臣王燕緒

校對官臣靈臺郎臣陳際新

謄錄監生臣何以善

繪圖監生臣周履信

欽定四庫全書

歷算全書卷五十八

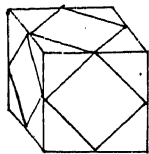
宣城梅文鼎撰

幾何補編卷四

方燈

凡燈形內可容立方立方在燈體內必以其尖角各切於八三角面之心

如圖



燈體者立方去其八角也平  
分立方面之邊為點而聯為  
斜線則各正方面內成斜線  
正方依此斜線斜剖而去其  
角則成燈體矣此體有正方  
面六三角面八而邊線等故  
亦為有法之體

凡燈體內可容八等面八等面在燈體內又以其尖角

各切於六方面之心

凡燈體內可容立圓此立圓內仍可容八等面此八等面在立圓內可以各角切立圓之點同會於燈體之六方面而成一點

凡燈體容立圓其內仍可容諸體然惟八等面在立圓內仍能切燈體餘不能也按圓燈在立圓內亦能切燈體與八等面同

凡諸體相容皆有一定比例以其外可知其內

燈體之邊設一百其冪一萬〇倍之二萬開方得一百

四十一

一四二  
一三

為燈之高及其腰廣

邊如方面高廣如  
斜故倍冪求之

以高一百四十一

一四二  
一三

乘方斜之面冪二萬得二百八

十二萬八千四百二十六為方斜之立方積

立方積五因六除得二百三十五萬七千〇二十一為

燈積

燈積為立方六之五

以燈積減立積餘四十七萬一千四百〇五為內容八

等面積此八等面在立積內亦在燈積內皆同腰廣同  
高 其積之比例為立積六之一為燈積五之一

此相容比例

八等面與燈積不惟同高廣亦且同邊故五之一亦即  
為八等面與燈積同邊之比例也

燈形內容立方其邊為燈體高廣三之二 設燈體邊

一百其高廣一百四十一<sup>四二</sup>則內容立方邊九十四<sup>一三</sup>

二八立方積八十三萬八千〇五十一

燈高廣自乘之冪二萬如左圖甲乙方去其左右各六  
 之一餘三之二如丙丁矩又去其兩端六之一餘三之



二如戊正方丙丁矩一萬三千

三百三十三三三戊正方八千

八百八十八八八為內容正方

之一面冪其根九十四〇二八

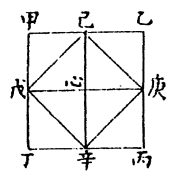
以根乘面得八十三萬八千

〇五十一



依前算八等面體其邊如方其中高如方之斜若以斜徑為立方則中含八等面體而其體積之比例為六與一

方立

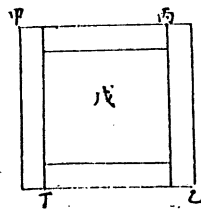


何以言之如已心辛為八等面之中高庚心戊為八等面之腰廣已庚已戊戊辛辛庚則八等面之邊也若以庚心

戊腰廣自乘為甲乙丙丁平面又以已辛心中高乘之為甲乙丙丁立方

立方一面之形與平面等

則八等面之角俱正切

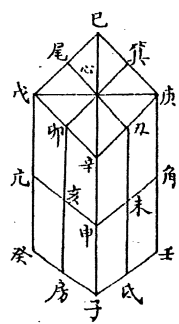


凡等邊平三角之心依邊剖  
 之皆近大邊三之一燈內容  
 立方之八角皆切於平三角  
 之心燈改立方則所去者皆

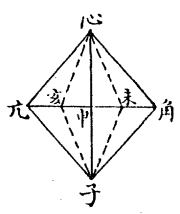
四圍斜面三之一於前形爲六之一四圍皆六之一合  
 之爲三之一而所存必三之二矣

凡立方體各自其邊之中半斜剖之得三角錐八此八  
 者合之卽同八等面體

### 半立方



### 八等面



立方之四隅各去一立三角

柱則成此體 其積為立方

之半為八等面之三倍其中

仍容一八等面體

八等面體在方柱體內

柱形從對角斜線如巳辛 戌庚剖

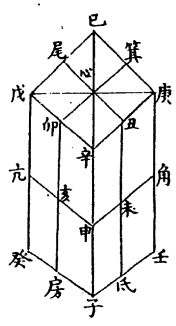
至底又從對邊十字線如丑 尾卯

箕剖至底又從腰線角申 元橫

於立方各面之正中而為立方內容八等面體矣夫已  
 心辛庚心戊皆八等面已庚等面為方之斜也故曰以其斜  
 徑為立方則中含八等面體也

又用前圖甲乙丙丁為立方之上下平面從已庚庚辛  
 辛戊戊已四線剖至底則所存為立方之半而其所剖

半立方

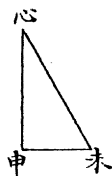
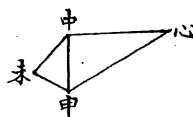


三角柱體四合之亦為立方之  
 半也

此方柱也其高之度如其方之斜

鬮

三角錐



八等面體從尖心剖至對角

亦剖至對邊而皆至底子又

從腰角申橫剖之則成三角

錐十六

夫方柱為塹堵十六而八等

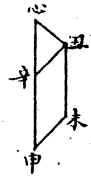
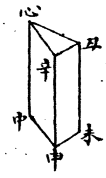
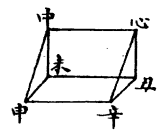
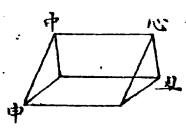
面為鬮鬮亦十六則塹堵鬮

鬮之比例即方柱八等面之

比例矣鬮鬮為塹堵三之一

堵塹成則眠

角為立  
柱三則



則為三角錐

塹堵立則為三角柱鼈臙立

三之一

底則鼈臙也鼈臙居塹堵

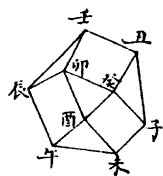
塹堵從一尖即心斜剖至對

三角柱眠視之則塹堵也

如心辛申  
未丑之體

截則剖為三角柱一十六即

燈



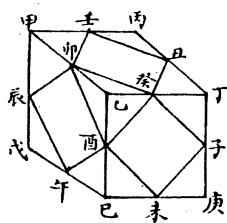
何以知之立方所去之八角  
 合之即成八等面八等面既  
 為立方六之一則所存燈體  
 不得不為立方六之五矣

凡立方內容燈體皆以燈之邊線為立方之半斜立方內  
 之燈體又容八等面則以內八等面之邊線為立方之  
 半斜與立方竟容八等面無異推此燈內容八等面其  
 邊線必等其中徑亦等

則八等面亦方柱三之一矣方柱者立方之半也八等面既為方柱三之一不得不為立方六之一矣

立方內容燈體

方立



甲庚立方體六面各平分其

邊

如壬丑癸卯及子未酉午辰諸點

而斜剖

其八角

如從丑癸剖至子從從癸卯剖至酉從酉

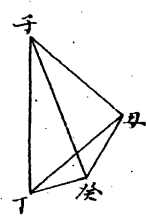
剖至午未則立方去其八角

成燈體

燈體立方六之五



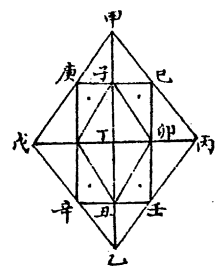
偏頂



偏錐立起則成偏頂錐為八等面分體

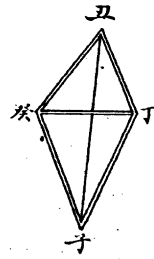
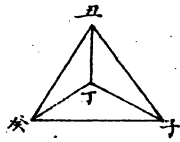
八等面容燈體之圖

正形



凡八等面容燈體皆以燈體之邊緣得八等面之半八等面內之燈體又容立方則亦方斜比例與八等面竟容立方無異也

扁



剖立方之角成此

以剖處為底則三邊等以立方之角丁為頂成三角扁錐

內容燈徑一 其邊〇七 其積六之五〇八三三三〇〇

內容八等面徑一 其邊〇七 其積六之一〇一六六六〇〇

凡立方內容燈體燈內又容立圓圓內又容八等面其

切於立方之面之中央凡六處皆同一點若立圓內容

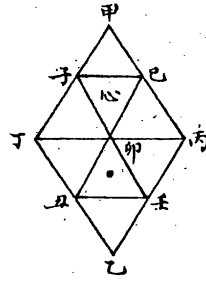
燈體燈內又容立方內又容八等面其相切俱隔遠

不能同在一點

凡燈體皆可依楞橫剖如方燈橫剖成六等邊面故其

外切立圓之半徑與邊等 如圓燈橫剖成十等邊面

形例



等徑之比例

立方徑一

其邊一

其積一

一〇〇〇〇〇〇

甲丙丁丙丁乙甲丁戊戊丁  
乙皆八等面之一巳子卯等  
小三角在甲丁丙等大三角  
面內即燈體之八斜面正切  
於八等面者也其中央心點  
即內容立方角所切

故其外切立圓之半徑與其邊若理分中末之全分與其大分

凡諸體改為燈皆半其邊作斜線剖之

凡燈體可補為諸體皆依其同類之面之邊引之而會於不同類之面之中央成不同類之錐體乃虛錐也虛者盈之即成原體所以化異類為同體也

如方燈依四等邊引之補其八隅成八尖即成立方若依三等邊引之補其六隅成六尖即成八等面

如圓燈依五等邊引之補其二十隅成二十尖即成十二等面若依三等邊引之補其十二隅成十二尖即成二十等面

增異類之面成錐則改為同類之面而異類之面隱此化異為同之道也

凡燈體之尖皆以兩線交加而成故稜之數皆倍於尖

方燈十二尖二十四稜

圓燈三十尖六十稜

凡燈體之稜即邊皆可以聯為等邊平面圈如方燈二

十四稜聯之則成四圈每圈皆六等邊如六十度分圓  
線 圓燈六十楞聯之則成六圈每圈皆十等邊如三  
十六度分圓線 此外惟八等邊聯之成三圈每圈四  
楞成四等面而十二稜成六尖有三稜八觚之正法  
其餘四等面十二等面二十等面皆不能以邊正相聯  
為圈

燈體亦有二

其一為立方及八等面所變其體有正方之面六三角

之面八有邊稜二十四而皆同長稜尖凡十有二  
其一為十二等面二十等面所變其體有五等邊之面  
十二有三角等邊之面二十有邊楞六十而皆同長稜  
尖凡三十

立方及八等面所變是剉方就圓終帶方勢謂之方燈  
十二等面及二十等面所變是削圓就方終帶圓體謂  
之圓燈方燈為立方及八等面所變其狀並同而比例  
同



內容燈體之比例也若燈與立方同邊必反小于燈

如假

燈體邊亦一百則其積二百三十五萬七千〇二十一而立方一百之積只一百萬是反小於燈也

解曰燈體邊一百

如前圖之丁壬

其外切立方必徑一百四十

一四二一三如前圖之丁辛

其自乘之幂二萬以徑乘幂得二百八

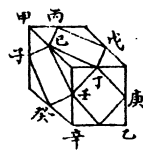
十二萬八四二六為立方積再五因六除得燈積二百

三十五萬七千〇二十一

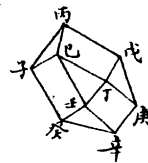
又法以燈邊自乘倍之開方得根仍以根乘倍幂再五

因六除

方立



燈為改



甲乙立方體丙丁戊己庚辛

壬癸子皆其邊折半處各於

折半點聯為斜線  
如丙戊  
 丙己等依

此燈體斜線剖而去其角則

成燈形矣

燈形之丁辛高丙丁濶皆與立方同徑 其邊得立方

之半斜 假如立方邊丁壬七十有奇 其積得立方六之五

假如立方邊一百其積百萬則燈體邊七十 此為立方  
有奇其積八十三萬三千三百三十三

邊折半於丑於癸於子各以折半點聯為斜線則各成  
小三等面如甲丙丁面內又成庚辛巳三等邊面其邊  
皆半於原邊如庚辛得丁丙之半餘三邊同

各自其小三角之面之邊剖之而去其錐角則成燈形  
矣

如依辛巳巳丑丑癸癸辛四邊平剖之而去其丁角

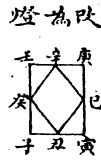
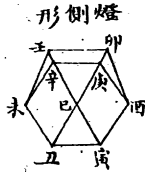
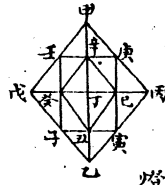
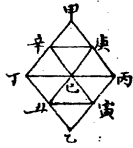
丁以

角為尖辛巳丑癸為底成則所剖處成辛巳丑癸平方

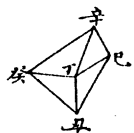
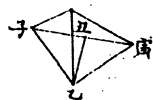
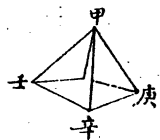
面去甲壬辛庚錐成卯壬辛庚面去丙庚巳  
寅錐成庚酉寅巳面並同一法餘可類推

八等面正形

側形



見積亦同  
 甲乙為八等面體 甲乙丙  
 丁戊皆其邊稜所轉之尖  
 甲丙丁面三邊皆等其三邊  
 折半於辛於庚於巳  
 甲丁戊面其邊折半於辛於  
 壬於癸乙丙丁面其邊折半  
 於寅於巳於丑乙丁戊面其



何以知之曰同類之體積以其邊上立方積為比例故邊得二之一其積必八之一也今所剖去之各尖俱以平方為底而成方錐兩方錐合為一八等面體皆等面等邊與原體為同類而其邊正得原邊二之一則其積為八之

八等面體有六角皆依法剖之成平方面六而剖之後  
各存原八等面中小三角等邊面八與立方剖其八角  
者正同

燈形之高濶皆得八等面之半

如辛丑高得甲乙之半

己癸濶得丙戊之半

其邊亦為八等面原邊之半

其積得八等面八之五

一也 原體六尖各有所成之錐體皆相等合之成同類八等面之體凡三其積共為原積八之三以為剖去之數則所存燈體得八之五也

如上圖甲乙二錐合為八等面體一丙戊二錐合為八等面體一 丁尖及所對之尖共二錐合為八等面體一 一通共剖去同類之形三

假如八等面之邊一百則其積四十七萬一千四百〇四其所容燈體邊五十其積必二十九萬四千六百二

十七五 以八等面積五因八歸之見積

或用捷法竟以十六歸進位所得燈積亦同

右法乃八等面內容燈體比例也

若燈體之邊與八等面同大則其積五倍大於八等面  
假如燈體邊一百則其積二百三十五萬七千。二十  
以八等面邊一百之積四十七萬一千四百。四加五  
倍得之 此法則燈體與八等面同為立方所容之比  
例亦即為燈內容八等面之比例



准此而知燈內容八等面八等面又容燈則內燈體為  
外燈體八之一

燈體內容八等面 五之一

用時零乘法化大分為小分  
以八等面母數八乘五之一

八等面內容燈體 八之五

得八乘母數五得四十

外燈體四十 八等面體八 內燈體五 合之為內體得外  
體四十之五約為八之一

又八等面容燈燈又容八等面內八等面亦為外八等面八之  
一 其體之比例既同則其所容之比例亦同也

立方內容燈體燈內又容立方則內立方邊得外立方邊三之  
二內立方積得外立方積二十七之八

以三之二自乘再乘為三加之比例也

六之五 一百三十五

一百六十二

二十七之八 四十八

准此而知燈內容立方則內立方積得燈積一百三十五之四  
十八 若燈容立方立方又容燈則內燈積亦為外燈積二十  
七之八其為所容者之比例即能容者之比例故也

求丙戌中長線

以戌丁冪三因之為丙戌冪平方開之得六十一二二七二

為丙丁乙等邊三角形中長線

求甲巳中高線

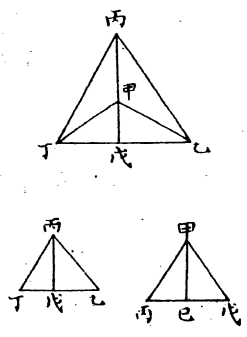
法以戌丁冪一千二百五十取三之一為巳戌冪四百一十六

與甲戌冪即丁戌冪相減餘八百三十三為甲巳中高冪開

方得甲巳中高二十八八六七五

又以巳戌冪開方得巳戌二十四一四二以巳戌二四一四

求方燈所去錐體



三角錐稜皆五十即原邊之

半 甲乙甲 丙甲丁 底之邊皆七十

○ 七一 即燈體之邊 丙乙乙 丁丁丙

其半三十五 三五五三 乙戊戊丁

求甲戊斜垂線

法曰乙丁為甲乙之方斜線則甲戊為半斜與乙戊戊

丁等皆三十五 三五 其冪皆一千二百五十

四 乘戊丁 三十五三 得 七百二十一 又三因之得 二千

六十四〇 為乙丙丁三等邊幕

又以中高甲已 二十八八 乘之得數三除之得三角錐

積二萬〇八百二十三 六六 又八乘之得一十六萬六

千五百八十七 〇三 為所去八三角錐共積即立方一百

萬六之一與前所推合 本該一十六萬六千六百六十

然不過萬 分之一耳

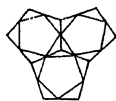
圓燈為十二等面二十等面所變體勢並同而比例亦

別

公法皆於原邊之半作斜線相聯則各平面之中成小  
平面此小平面與原體之平面皆相似即為內容燈體  
之面 依此小平面之邊平剖之去原體之銳角此所  
去之銳角皆成錐體錐體之底平剖錐體則原體挫銳  
為平亦成平面於燈體原有若干銳亦成若干面而與  
先所成之小平面不同類然其邊則同

如圖

十二等面  
之分形



變燈



十二等面每面五邊等今自

其各邊之半聯為斜線則成

小平面於內亦五等邊為同

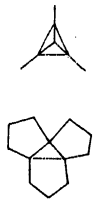
類

依此斜線剖之而去其角所

去者皆成三角錐體既去

即成三等面為異類

原有十二面故所存小平面



同類者亦有十二

原有二十尖故所剖錐體而

成異類之面者亦二十

求燈體邊

法以十二等面邊為理分中末之大分求其全分而半之即為內容燈體之邊

一率 理分中末之大分

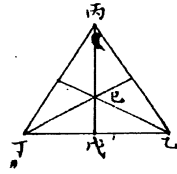
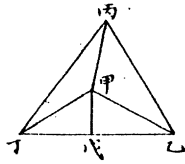
六十一

八〇三  
三九八

二率 理分中末全分之半

五十〇





法當以所得戊巳自乘為句

冪用減甲戊冪餘為甲巳冪

開方得一十七八四為中高

今改用捷法省求取戊丙冪

九之一為戊巳冪戊巳為戊丙三之一

故其冪為得五百四十五四

三

或徑用戊丁冪三之一亦同

三率 十二等面之邊

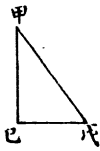
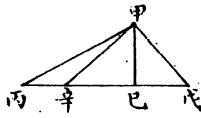
一百〇〇

四率 內容燈體之邊

八十〇

九〇  
一七

燈體邊原為大橫線之半十二等面邊與其大橫線若  
小分與大分則亦若大分與全分也而十二等面邊與  
燈邊亦必若大分與全分之半矣



總乘較為實戊丙底為法法  
 除實得丙辛以丙辛減戊丙  
 得戊辛折半為戊巳

解曰原以戊丁冪減甲丁冪得甲戊冪復以戊丁冪三之一減甲戊冪得甲巳冪今以戊丁三分加一而減甲丁冪即徑得甲巳冪其理正同

前之捷法有求丙辛及較總相乘後用底除諸法可謂捷矣今法徑不求甲戊斜垂線捷之捷矣凡三角錐底濶等者當以為式

訂定三角錐法

圓燈所去

用捷法以戊丁冪三分加一減甲丁冪為甲巳冪

又捷法不求甲戌斜垂線但以戊丁冪三分加一以減

甲丁即甲丙或甲乙冪為甲巳冪開方即得甲巳中高比前法

省數倍之力

戊丁冪 一千六百三十六二七一

三之一 五百四十五四二七

併得 二千一百八十七六九九

甲丁即甲丙冪 二千五百〇〇

相減餘冪甲乙 三百一十八三〇五

與前所得同

冪丙乙得三角柱積五萬〇五百六十三五二三除九三

之得錐積一萬六千八百五十四九五〇又以二十乘九七

之為燈體所去之積三十三萬七千〇九十一九〇

十二等面邊設一百前推其積為七百六十八萬三千

二百一十五今減去積三十三萬七千〇九十存燈積

七百三十四萬五千一百二十五 內容燈體邊八十

〇九〇

一七

依測量全義凡同類之體皆以其邊上立方為比例可

法以半邊

丁戊

乘中長

戊丙

得底幕

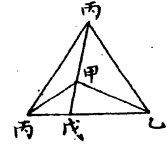
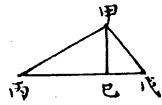
丁丙

乙

以中高

乙甲

乘底



一〇  
三八

丙乙丁底幕二千八百三十四

甲乙一十七  
八四  
一四  
為中高

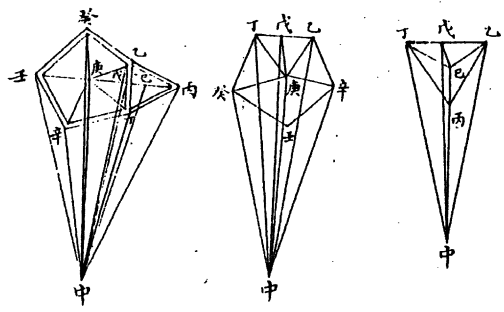
丙戊七十〇  
二〇  
九六  
為底之垂線

半  
戊乙丁  
四十〇  
四  
五〇  
八半

丙丁  
乙丁  
乙丙  
皆八十〇  
九〇  
一七〇  
其

甲丁  
甲乙  
甲丙  
皆設五十

# 圓燈



邊設三十。九〇一七即理分  
中未之大分乙丁

外切立圓半徑五十  
即理分中未之全分丁中乙中

外切立圓全徑一百  
即外切立方

體積四十〇萬三千三百四十九

內有三角錐計二十共計一十二萬

八千七百五十二

五稜錐計十二共積二十七萬四千

以推知二十等面所變之燈體

二十等面邊設一百則燈體之邊五十

捷法求得一百七十三萬三千九百四十八為設邊五十之燈積

一 燈體邊八十九〇之立方五十二萬九千〇百〇八五

二 燈體積七百三十四萬五千一百二十五

三 燈體邊五十之立方一十二萬五千

四 燈體五十之積一百七十三萬三千九百四十八



五百九十六

丁中丙乙三角錐為圓燈分體之一 乙丁丙三等邊  
面已為平面心 中為體心 中已為分體之中高  
戊丁為半邊丁中自體心至角線為分體之稜 戊中  
為斜垂線

乙癸中辛五稜錐亦圓燈分體之一 乙丁癸壬辛五  
等邊面庚為平面心 中庚為分體中高 其戊丁半  
邊丁中分體稜戊中斜垂線與前三角錐皆同一線

何以知兩種錐形得同諸線乎曰乙戊丁邊兩種分體  
所同用而兩種錐體皆以體心中為其頂尖故諸線不  
得不同觀上圖自明

先算三角錐 共二十

半邊一十五 四五〇 戊丁冪二百三十八 七七二

平面容圓半徑 即戊 〇八〇九一 其冪七十九 五七六二  
用捷法取

戊丁冪以  
三除得之

平面積 乙丙 四百一十三 七四八

中高

即巳中

四十六

七〇七五本法以戊丁冪減丁中冪為戊中冪又以戊丁冪三之一當戊

巳冪減之為巳中冪今徑以戊丁冪加三之一減丁中冪為巳中是捷法也

三角錐積六千四百三十七

六六二〇

二十錐共積一十二萬八千七百五十三

三四

次算五稜錐

共十二

半邊一十五

四五〇八五戊丁

半周七十七

二五四二五角半邊五因得之

平面容圓半徑二十一

二六六三戊庚

五等邊平積一千六百四十二

九一  
二〇

中高四十一

七八五三  
庚中

五稜錐積二萬一千九百六十二

六六

十二錐共積二十七萬四千五百九十六

求戊庚半徑

一率 三十六度切線

〇七二六五四

二率 全數

一〇〇〇〇〇

三率 半邊戊丁

一十五

四五  
八五

戊丁半邊冪四因之為全邊三十。九〇之冪

一 燈體邊五十之立方一十二萬五千

二 燈體邊五十之體積一百七十三萬三千九百四

十八

三 燈體邊三十。九〇之立方二萬九千五百〇八

四九  
八七

四 燈體邊三十。九〇之體積四十〇萬九千三百

二十九與細推者只差五千九百八十為八十分之一

四率

平面容圓半徑

戊 二十一 二六  
 庚 六二

戊丁句幂二百三十八 七二  
八七

相減

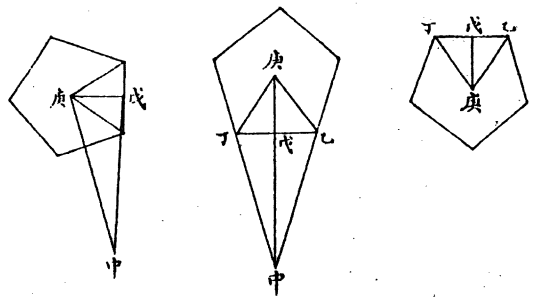
丁中弦幂二千五百〇〇

戊中股幂二千二百六十一 二七  
一三

戊庚句幂四百五十二 二五  
五五

戊中弦幂二千二百六十一 二七  
一三 相減

庚中股幂一千八百〇九 一  
五八



又可變為二十四等面體面皆三邊凸邊二十四凹邊  
十二十字之交六凡八角如蒺藜形

六等面體又可變三十六等邊體為八邊之面六為三  
邊之面八凡二十四角

八等面體亦可變三十六等邊體為六邊之面八為  
四邊之面六凡二十四角

又可變四十八等邊體為四邊之面十八為三邊之面  
八凡二十四角

柱積六萬八千六百四十九

錐積二萬二千八百八十三

十二錐共積二十七萬四千五百九十六

孔林宗附記

方燈可名為二十四等邊體 圓燈可名為六十等邊

體

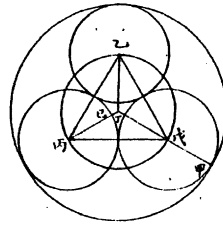
四等面體又可變為十八等邊體為六邊之面四為三

邊之面四凡十二角



夾之

渾



甲大渾圓內容丙戊乙巳四

小渾圓法以小渾圓徑

如乙戊戊

已為邊作四等面體而求其

體心如丁 次求體心至角

線

如丁戊丁巳丁乙丁丙又為外切立圓半徑

加小渾圓半徑

即戊甲

為大圓

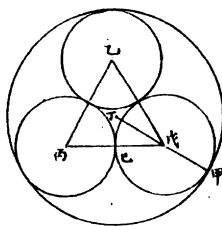
半徑

如丁甲

凡渾圓內容四渾圓或容六渾圓或容八渾圓十二渾

大圓容小圓法 平渾

平



甲大圓內容乙戊丙三小圓

法以小圓徑

如乙戊  
戊丙

為邊作

等邊三角形而求其心如丁

乃於丁戊

三角形自  
心至角線

加戊甲

小圓  
半徑 為大圓半徑 丁  
甲

凡平圓內容三平圓四平圓五平圓六平圓皆以小圓

自相扶立 若平圓內容七平圓以上皆中有稍大圓

一率 方斜併數 二四一四

二率 方根 一〇〇〇

三率 所設之渾圓半徑 丁甲

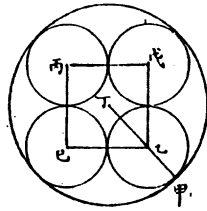
四率 所容之小圓半徑 乙甲

推此而知五等邊形於其銳角為心半其邊為界作小圓而以五等邊之心至角如半邊以為半徑而作大圓則大圓容五小圓俱如上法

若六等邊於其銳作小圓仍可於其心作圓共七小圓

圓皆直以小渾圓自相扶 若渾圓內二十渾圓則中  
多餘空必內有稍大渾圓夾之

平



如<sub>乙</sub> 為大圓半徑  
甲<sub>如丁</sub>

若先有大圓 甲 而求所容小圓則以三率之比例求之

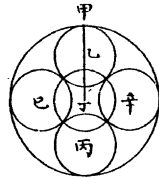
甲大平圓內容<sub>乙</sub>戊丙<sub>乙</sub>四

小平圓法以小圓徑<sub>如乙</sub>為

邊作平方<sub>如乙</sub>而求其斜<sub>丙</sub>

如<sub>丁</sub><sub>乙</sub>即方心<sub>加小圓半徑</sub>  
至小圓心線

對面



之度 如丁 加小圓半徑 如甲

為大渾圓半徑 如甲

捷法以小渾圓徑為方 即乙丙

辛平 求其斜 如丁 加小圓半

徑 如甲 為大圓半徑或以小渾圓徑自乘而倍之開方

得根加小圓半徑為大圓半徑亦同

或先得大圓而求小圓徑則用比例

一率 方斜并 二四一四

何也六等面之邊與半徑等也其法只以小圓徑

即六等邊

二分加一為大圓半徑

甲大渾圓內容乙丙等六小

渾圓

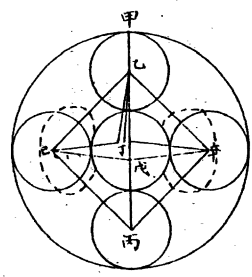
法以小渾圓之徑為邊作八

等面虛體如乙巳丙辛戊皆

小立圓之心聯為線則成八

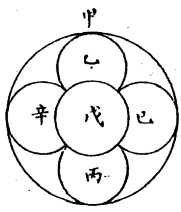
觚乃求八等面心丁至角

渾



正面

渾



三才圖會

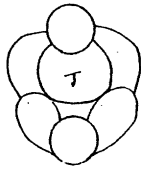
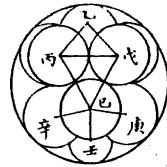
應算全書

三

面正

面對

渾



角  
即小之線  
 丁如乙  
 加小圓半

徑  
如甲  
 為大圓半徑  
如甲

按體心至角線即二十等面

外切圓半徑

二十等面之例邊一百  
即小渾圖

例徑

外切渾圓例徑二百八十八

一三五  
 五

二率 方根 一〇〇

三率 所設大渾圓之徑

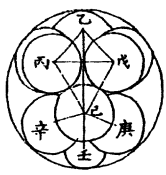
四率 內容六小渾圓之徑

甲渾圓內容乙丙戊己庚壬辛及癸丑子寅卯十二小

圓

渾

正 面



法以小立圓徑如乙作二十

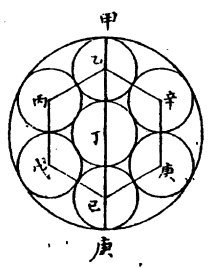
等面虛體之稜如乙丙等俱小圓之心聯

為線則成二十等面之稜 次求體心 丁至



甲庚大平圓內容七小圓

平



法以甲庚圓徑取三之一如

乙庚為小圓徑若容八圓以

上則其數變矣假如以七小圓

均布於大圓周之內而切於

邊則中心一小圓必大於七

小圓而後能相切以上

傲此

二十等面邊一百者其外切渾圓徑一百八十八奇又加小渾圓例徑得此數

若先有大渾圓而求所容之十二小渾圓則以二率爲一率四率爲三率

一 外切渾圓之例徑二百八十八

一三五五

二 二十等面之例邊一百

卽小渾圓例徑

三 設渾圓之全徑一百

四 內容十二小渾圓之徑三十八

六九四八

其比例如全分與小分

圓在內乎

又二十等面有十二尖可作十二小圓以居大渾圓之內而為所容

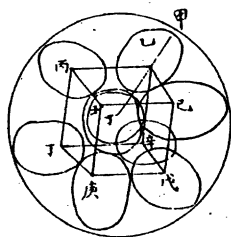
又八等面有六尖可作六小圓為大渾圓所容 四等面有四尖可作四小圓

又方燈亦有十二尖可作十二小圓為大渾圓所容其中容空處仍容一小圓為十三小圓皆等徑也

十二等面有二十尖用為小渾圓之心可作二十小立

甲大渾圓內容八小立圓

渾



法以小圓徑作立方

如庚方求

其立方心至角數

即外切渾圓半徑如

丁再加小圓半徑

如甲為大

渾圓半徑

如甲

按八小員半徑十<sub>丁</sub>甲則其全徑二十內斜線

丁十七加

丁共二十七內減小圓徑二十餘七倍之得十四是比

小圓半徑為小其比例為十之七安得復容一稍大小

渾圓內容各種有法之體以查曲線弧面之細分

公法凡有法之體在渾圓體內其各尖必皆切於渾圓之面

凡渾圓面與內容有法體之尖相切成點皆可以八線知其弧度所當

內惟八等面皆以弧線十字相交為正角餘皆銳角其十二等面則鈍角

十二等面每面五邊等析之從每面之角至心成平三

圓以切大渾圓內有稍大渾圓夾之

圓燈尖三十可作三十小球亦皆以內稍大渾圓夾之  
公法皆以心至尖為小渾圓心距體心之度皆以小渾  
圓徑為所作虛體邊

如作內容二十小渾圓聯其心成十二等面虛體

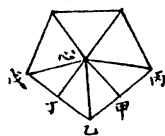
虛體之各邊皆如小渾圓徑也虛體之各尖距心皆等  
此距心度以小渾圓半徑加之為外切之大渾圓半徑  
以小渾圓半徑減之為內夾稍大渾圓半徑

渾體之弧面皆如其內切體等面之數之形

如四等面則其分為弧面者亦四而皆為三角弧面十  
二等面則亦分弧面為十二而皆成五邊弧形八等面  
則弧面亦分為八二十等面弧面亦分二十而皆為三  
角弧形內惟六等面為立方體所分弧面共六皆為四  
邊弧形

凡渾圓面上以內切兩點聯為線皆可以八線知其幾  
何長

凡渾圓面切點依內切各面之界聯為曲線以得所分



角形五則轉心之角  
 皆七十二度半之三  
 十六度即甲心乙角  
 其餘心乙甲角必五  
 十四度倍之為甲乙  
 丁角則百。八度故  
 為鈍角



渾冪分為四即與渾圓中剖之平圓等冪矣

推此而知六等面分外切渾圓冪為六即各得中剖平

圓三之二

八等面分渾圓冪為八即各得中剖平圓之半冪

十二等面分渾圓冪為十二即各得中剖平圓三之一

二十等面分渾圓冪為二十即各得中剖平圓五之一

凡依等面切渾所剖之圓冪又細剖之皆可以知其分

冪

其法以各體心到角之線命為渾圓半徑以此半徑求其周作圈線即為圓渾體過極大圈以八線求兩點所當之度即知兩點間曲線之長

凡渾圓面以曲線為界分為若干相等之弧面即可以知所分弧面之冪積

假如四等面外切渾圓依切點聯為曲線分渾圓面為四則此四相等三角形弧面各與渾圓中剖之平圓面等冪何也渾圓全冪得渾體中剖平圓面之四倍今以

再剖則一剖為六為渾圓面冪二十四之一

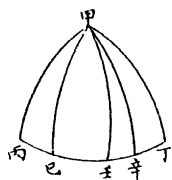
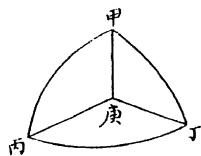
皆得十二等面所剖

之半而邊不等

若但一剖為二則得渾圓冪八之一與八等面

所剖正等但八等面三邊等又三皆直角此則邊不等

又非直角

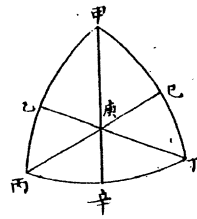


假如八等面所剖為渾圓冪八

之一若一剖為二則十六之

一剖為四則三十二之一可

以剖為六十四至四千九十



假如四等面所分為渾圓冪

四之一而作三角弧面若中

分其邊而會於中心則一又

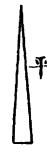
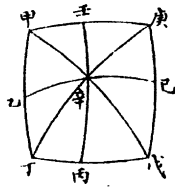
剖為三為渾圓冪十二之一

與十二等面所分正等但十

二等面所剖為三邊弧線等此所分為四邊弧線形如

方勝而邊不等若自各角中會於心成三邊形其冪亦

不等也



以平徑為兩弦以會於平圓  
之心則其冪為平圓四之一  
若渾體四面以腰圍九十度  
為底兩端各以曲線為兩弦  
以會於渾圓之極則其冪為  
平圓二之一矣

假如六等面 即立 在渾圓內  
剖渾冪為六得渾冪六之一

六 若以三剖則渾冪二十四之一如十二等面之均剖亦如四等面之六剖也再細剖之可以剖為九十是依度剖也可以剖為五千四百則依分割也再以秒微剖之可至無窮

惟八等面可以細細剖之者以腰圍為底而兩弦會於極其形皆相似故剖之可以不窮

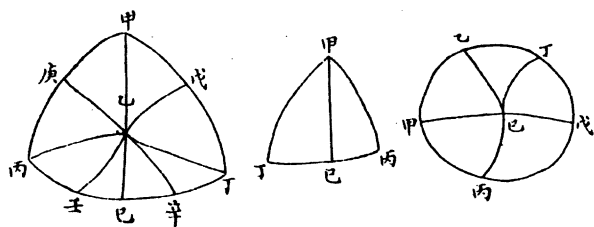
又以此知曲面之容倍於平面何也八等面所剖之渾體腰圍即平圓周也以平圓周之九十度為底兩端皆

與八等面所剖為十五之一

假如二十等面剖渾冪為二十各得渾冪二十之一若  
一剖二則四十之一若一剖三則六十之一若一剖六  
則百二十之一皆與十二等面所剖之冪等而邊不必  
等也

凡球上所剖諸冪以為底直剖至球之中心成錐形即  
分球體為若干分

如四等面之冪得球冪四之一依其邊直剖至球心成



若一剖為二則與十二等面  
所剖等剖為四則二十四之  
一再剖則一為八而得四十  
八之一

假如十二等面剖渾冪為十  
二各得渾冪十二之一若剖  
一為五則得六十之一再剖  
一為十則得百二十之一而





三角錐其錐積亦為球體四之一推之盡然

得數平方開之得三等邊形之冪積

捷法不求中長線但以丁乙冪三因之與丁乙冪相乘  
開方得根即三等邊冪積 或用原邊丁甲自乘得數  
乃四分之取四之一與四之三相乘得數開方得三等  
邊積亦同

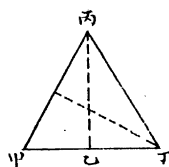
論曰邊與邊橫直相乘得積若邊之冪乘邊之冪亦必  
得積之冪矣故開方得積

法曰以原邊之冪三因四除之又以原邊之半乘之兩

幾何補編 補遺

平三角六邊形之比例

平三角等邊形



甲丁丙三邊等形其邊

丁折半

丁自乘而三之即為對角中

長線冪開方得中長線丙乙

既得中長線丙乙以乘丁

乙半邊即等邊三角形積 若以丙乙冪丁乙冪相乘

三等邊形與所作正方形其積之比例若平積三與十

六之平方根也

即一七奇與四〇

捷法於分面線上取三點為等邊三角形積其十六點

即正方積 若以邊問積則以邊之方冪數於分面線

之十六點為句置尺取三點之句即得三等邊積其設

數得數並於平分線取之

此用比例尺算

又法作癸卯辰半員辰癸為徑於徑上勻分十七分而

儘一端取其四分如丑癸

丑癸為辰癸十七分之四則丑子為辰子十六分之三

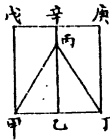
次為實平方為法開之得三等邊形冪積

解曰原邊冪四之三即中長冪也半邊乘二次以冪乘也 又法以原邊與半邊冪相減相乘開方見積

平三角等邊形冪積自乘之冪與正方形冪積自乘之

冪若三與十六

理同  
前條



解曰甲戊庚丁為正方形丁

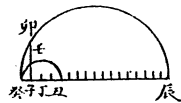
丙甲為等邊三角形其邊同

為甲丁題言丁甲線上所作

取子癸為卯子四之一又取丁子如癸子次以丁癸為  
半徑丁為心作半員截卯子於壬即得壬子為三等邊  
積

捷法不作辰子線但於子作半十字線如癸丁次於子  
點左右取癸取丁各為卯子四之一乃任以丁為心癸  
為界作割員分即割卯子於壬而為三等邊形之積

論曰此借用開平方法也平方求根有算法有量法此  
所用者量法也量法有二其一以兩方之邊當句當股



邊冪與正方冪積比例

用法有三等邊形求積法以甲丁邊上方形甲即庚積作  
 卯子直線如句四倍之作橫線如辰子為股次引橫線

折半於丁以丁為心丁癸為  
 半徑作癸壬丑小半員又以  
 丁癸折半於子作卯子直線  
 與辰癸徑為  
 十字垂線 割小員於壬則  
 壬子與卯子之比例即三等



徑 一法倍容圓半徑即外切圓半徑

新增求六等邊法

法曰六等邊形者三等邊之六倍也

以同邊者言

用前法

得三等邊積六因之即六等邊積

依前法邊上方冪與三等邊形冪若四〇與一七竒因

顯邊上方冪與六等邊形冪若四〇與十〇二竒

亦若一〇

〇與二五五

今有六等邊形問積 法以六等邊形之一邊自乘得

而求其弦是為并方法也其一用半員取中比例此所用者中比例也

詳比例  
規解

### 附三等邊求容圓

法曰以原邊之冪十二除之為實平方開之得容圓半徑

解曰原邊冪十二之一即半邊三之一也

### 附三等邊形求外切圓

法曰以原邊之冪三除之為實平方開之得外切圓半

數再以二五五乘之降兩位見積

解曰置四〇與一〇二各以四除之則為一〇〇與二五五之比例也

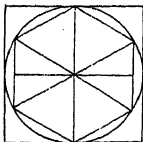
若問員內容六等邊形者即用員半徑上方冪為實以二五五為法乘之得數降二位見積亦同

降二位者一〇〇除也

依顯平員積與其內容六等邊形積之比例若三一

四與二五五

論曰六等邊形之邊與外切員形之半徑同大故以半



徑代邊其比例等  
半徑上方與六等邊

形亦若一與二五五然則員全徑上方

形與內容六等邊形必若四

〇〇與二五五  
全徑上方原為半徑上方

之四 而員面冪積與六等邊形積亦必若三一四與二

五五矣  
員徑上方與員冪原若四〇〇與三一四故也

用尺算 用平分線 求同根之冪

平方冪 四〇〇 八十〇

皆倍而退  
 位之數

平員冪

三一四

約爲六十三弱

實六  
二八

六等邊冪

二五五

五十一

三等邊冪

一七〇

三十四

右皆方內容員員內又容六角之比例其六等邊與  
員同徑乃對角之徑也於六等邊之邊則爲倍數三  
等邊則只用邊

若六等邊形亦卽用邊與平方平員之全徑相比則如  
後法

平方

四〇〇

平方

一〇〇〇〇

平員

三一四

平員

七八五四

六角

一〇二〇

六角

二五五〇〇

三角

一七〇

三角

四二五〇

論曰以平方平員之徑六角三角之邊並設二〇則爲平方四〇〇之比例若設一〇〇則如下方平方一〇〇〇〇之比例也

量體細法

二十等面之稜線甲丁設一百七十八

原設一百一十因欲使外切立

方與十二等面同故改此數

心乙一百四十四

即原切十等邊之半徑又為外切立

方之半徑

外切立方徑二百八十八

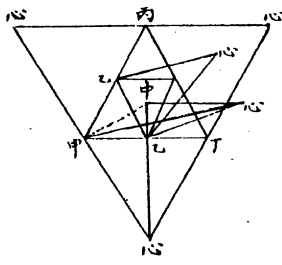
求中心為分體之高 法先

求乙中 乃各稜折半處至三角面中央一點之距

依幾何補編半甲丁得八

十九為甲乙自乘 七千九百二十一

取三之一 得二千六百四十一又三之一 為



四等面體求積

法曰以原邊之冪三除之得數以乘邊冪得數副實之  
又置邊冪二十四除之得數以乘副平方開之即四等  
面積也

又法置半邊冪三除之得數以乘半邊冪得數副實之又  
以六為法除半邊冪得數為實平方開之即四等面積四

分之一也

即三角  
扁錐

算二十等面



或取理分中末線之大分

如心

為股小分

如甲乙

為句

取其弦

甲心或丁心

為二十等面自角至心之楞線合

之成甲心丁形即二十等面分形之

斜立面也甲丁則原形之楞也

如甲心之面三皆以心角為宗以甲

心等弦合之

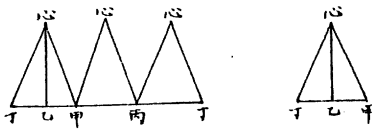
三面皆有此弦

則甲丁等底

底

並同甲丁以尖相遇而成三等邊之面即

二十等面之一面也以此為底則成



乙中句冪又以心乙一四自乘二〇七為弦冪相減餘三六

一萬八千〇九為股冪開方得心中一百三十四半強十五又三之二

為分體銳尖之高倍之得二百七十九半弱為內容立

員徑

求甲心為分體斜棱 法以甲乙為句其冪七九以乙二一

心為股其冪二〇七併之二八六為弦冪開方得甲心三六

一百六十九二為分體自角至銳之斜棱 倍之三百

三十八半弱為外切渾員之徑

簡法取乙甲即原楞之半又即小分自冪三之一以減乙心即大分

即原楞均半處至形之冪即心中冪

又解曰原以甲乙半楞又即二十等面中剖所成之楞

為句在形內為小分乃乙戊也今形外乙心即二十等

十等邊自角至心之弦故為大分又即為股則甲心為

弦自各角至而甲心弦冪內有乙心股甲乙句兩冪今

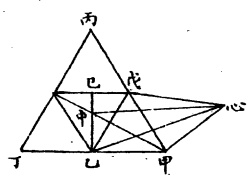
求心中之高則又以甲中為句自各角至各面心也而

仍以甲心為弦弦冪內減甲中句冪則其餘心中股冪

三角尖錐矣 尖錐之立三角面皆等皆稍小於底

解曰乙戊與甲乙等而甲心與戊心即乙心不等如弦與

股乙戊即十等邊之一邊乃今欲求心中正立線中即



二十等面一面之中自此至

心成心中線則其正高也

法先求甲中為句取其冪以

減甲心弦冪即心中股冪開

方得心中

切立方之半徑 再以大分為股心小分為句甲亦即甲取

其弦甲心即二十等面自各角至心之線謂之角半徑亦即切員半徑 再以原楞甲

為底切員半徑為兩弦甲心及丁心成兩等邊之三角形即

二十等面體自各角依各楞線切至體心而成立錐體之

一面三面盡如是則成三角立錐矣 如是作立錐形

二十聚之成二十等面體

立錐體之中高線中心以乘三體面之冪而三除之得各

錐積二十乘錐積得立積 其中高線中心即內容立員

也 依幾何補編甲乙冪三分加一為甲中冪故但於  
乙心冪內減去甲乙冪三分之一即成心中股冪

又解曰若以乙心為弦則中乙為句而心中為股依補

編中乙冪為甲乙冪三分之一故直取去甲乙冪三之

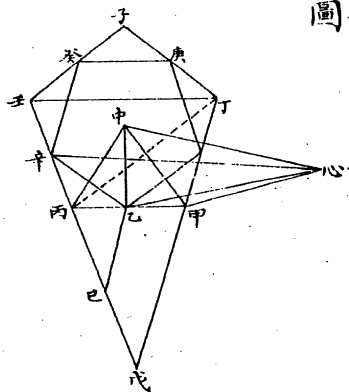
一為句冪以減心乙弦冪即得心中股冪開方得心中

此法尤捷

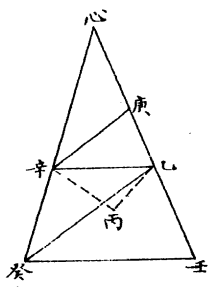
作法 以二十等面之楞 如甲 折半 如甲乙或丁 為理

分中末之小分求其大分 如乙心即二十等面各楞線  
當中心一點至心之線亦即外

十二等面之一圖



分圖



<p>九百二 十一 為股冪并二冪 一萬 〇九</p>	<p>百四 十六 平方開之得弦 一〇四 又六二</p>	<p>不盡約為一 〇四半強 為角至體心之</p>	<p>線心即外切立員之半徑</p>	<p>算二十等面之楞於渾天度</p>	<p>得幾何分</p>	<p>法以心甲為渾天半徑甲乙</p>	<p>為正弦法為心甲與甲乙若</p>
--	---	----------------------------------	-------------------	--------------------	-------------	--------------------	--------------------

之半徑

立方內容二十等面體其根之比例若全分與大分

立方內容十二等面體其根之比例若全分與小分

二十等面體之分體並三楞錐以元體之面為底

原體之楞丁甲折半乙甲為小分為句取其大分乙心為股句

股求弦得自角至心為外切員之半徑甲心

假如丁甲原楞一百一十半之得甲乙半楞五十五自乘

三千〇為句冪其大分乙心即外切立八十九自乘七

二十五方半徑



半徑與甲心乙角之正弦查正弦表得度倍之為丁甲  
通弦所當之度

算十二等面

五等邊面為十二等面之一 面有五邊在體之面則

為五楞錐其一楞設一百一十甲半之五十五乙以甲

丙為小分求其大分得一百七十八丙戊也即丙丁壬

角為丙中甲角之半與平圓十等邊之一面等半之八十九已丙也即乙辛以

兩腰等形辛已乙亦兩腰等形故辛乙與已丙等丙已乙形與无形丙戊甲形相似已角即戊角而乙丙為小分乙

巳或辛乙為內作小五等邊之一邊乙亦即十二等面為大分辛

從腰圍平切之十等邊面也

又以乙辛為小分求得大分一百四十四心乙也分圖辛心

乙形即前圖辛心乙形乙辛為心壬之小分心乙為大分乙心線即五等面一邊折半處至體心之距丙點即

五等面邊兩楞相湊之角乙丙辛虛線形即前圖乙丙辛形為甲丙半楞乙丙之全分何則

前圖之丙巳乙形乙丙為小分丙巳為大分試於辛乙

心形內分作庚辛乙形與丙巳乙形等庚乙即乙丙五等面一邊之半乙辛庚辛

即丙巳乙巳為小五邊形之一邊則乙庚為小分乙辛為大分心庚今又以乙

辛為小分求其大分壬癸而壬癸即心乙也乙癸同夫心

乙乃庚乙

小分辛乙大分即心庚

之并則乙心為庚乙之全分

矣其比例心乙與心庚若心庚與庚乙而乙心即外切

立圓半徑也

右法楊作枚補

今求心中線為五等邊最中一點中至體心心之距亦

即內容渾員半徑

先求乙中線為五等邊各楞折半處至最中之距法

為甲乙比乙中若半徑與五十四度之切線

一 半徑

一〇〇〇〇〇

二 乙甲中角

五十四度

切線一三七六三八

三 半楞甲乙

五十五

四 中乙

七十五 七〇

用句股法以心乙

一百四十四

為弦中乙

七十

為句句弦各

自乘相減得心中股冪平方開之得中高線

心中為容員半徑

求得容員半徑一百二十二半弱

中心

十二等面之分體並五楞錐並以五等邊面為底

原體之楞甲丙設一百一十半之乙甲五十五為小分

求其全分乙心一百四十四即外切立乙甲五十自乘

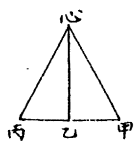
三千〇為句幂心乙一百四十四自乘二萬〇七為股幂并

之得二萬三千七百六十一平方開之得弦一百五十四為自角至心

之線甲心即外切員半徑

作法 以五等面之一邊為

五楞錐之一面



底楞甲丙以外切員半徑角至心之

又求甲心線為各角至體心之距即外切渾員半徑用句股

法以甲乙五五為句心乙一四為股并句股冪求甲心

弦

求得外切圓半徑一百五十四強甲心

十二等面根一一〇甲丙

外切立員半徑一四四乙心全徑二八八〇

內容渾員半徑一二二中心全徑二四五弱

外切渾員半徑一五四甲心全徑三〇八強

線為兩弦之楞甲心及丙心而會於心五邊悉同則為十二分體之一如是十二枚則成十二等面體

變體數

求渾圓積

設渾圓徑一〇〇〇自乘得一〇〇〇〇〇〇〇又十一  
古法乘之得一一〇〇〇〇〇〇〇為實十四除之得〇七  
八五七一四為平圓面幂或用舊徑七圍念二之比例  
亦得圓面七八五七一四以四因之得渾圓之幂三一

四二八五六

置渾圓之冪以半徑五〇〇因之得一五七一四二八  
〇〇〇是為以渾圓面冪為底半徑為高之圓柱形積  
置圓柱形積以三為法除之得五二三八〇九三三三  
是為以渾圓面冪為底半徑為高之圓角形積亦即渾  
圓之積

渾圓根一〇〇〇體積五二三八〇九三三三用為公  
積



立方

置公積即渾圓積

五二三八〇  
九三三三三

立方開之得立方根八

〇六二〇二七一七是為與渾圓等積之立方

方錐

置公積

九五二三八〇  
三三三三三

以三因之得數立方開之得高濶

相等之方錐形根一一六二二四四四七是為與渾圓等積之方錐

方



錐



圓柱

置公積同上十四因之十一除之為實立方開之得高潤  
相等之圓柱形根八七四二二九九四二是為與渾圓之  
積之圓柱

圓柱



圓錐

置公積前以三因之

變圓錐形積為圓柱積

再以十四因之十一

除之為實

變圓柱積為立方積

立方開之得高濶相等之圓錐形

根一二五九四七五九是為與渾圓等積之圓錐 或  
置積以四十二因之十一除之立方開之亦同

圓錐



按變體線本法有四等面八等面十二等面二十等面  
諸數表皆未及其同者惟有渾圓立方二形其餘三形

皆比例規解及測量全義之所未備今以法求之則皆長濶相等而不為渾圓立方者耳夫不為渾圓立方而仍可以法求者以其長濶相等則仍為有法之形也然而與今西書所載合者二不合者一意者其傳之有誤耶或其所用非徑七圍二十二之率耶俟攷

渾圓以徑求積

置徑自乘又以半徑乘之又四因之又以十一乘之以十四除之又以三除之見積

解曰平圓與平方之比例如其周與周假如七則方周二十八圓周二十二兩率各折半為十四與十一 徑自乘則為平方形以十一乘十四除則平方變為平圓矣以平圓為底半徑乘之成圓柱形再以三歸之成圓角形即圓錐 渾圓面冪為底半徑為高之角形四倍大於此圓角形故又四因之即成渾積也

捷法 徑自乘以乘半徑乃以四十四因四十二除見積 或徑上立方形二十二因四十二除或用半數十

一因二十二除見積並同

渾圓以積求徑

置積以三因之四除之又以十四因之十一除之再加一倍立方開之得圓徑

解曰圓積是圓角形四今三因之變為圓柱形四矣故用四除則成一圓柱此圓柱形是半徑為高全徑之平方為底今以十四乘十一除則變為全徑之平方為底半徑為高矣故加一倍即成全徑之立方

捷法 積倍之以四十二因四十四除立方開之得圓  
徑 或用本積以八十四乘四十四除立方開之 或  
用半數以四十二乘二十二除立方開之 或又折半  
以二十一乘乘十一除立方開之得積並同

按徑七圍二十二者乃祖沖之古法至今西人用之可  
見其立法之善雖異城有同情也雖其於真圓之數似  
尚有盈朒然所差在微忽之間而已吾及錫山楊崑生  
柘城孔林宗另有法其所得之周俱小於徑七圍二十

二之率則其所得圓積亦必小於古率矣

楊法立圓徑一〇〇〇〇積五二三八〇九二五六四

孔法立圓徑一〇〇〇〇積五二三五九八七七五

約法

立方與立圓之比例若二十一與十一平圓與外方

若十一與十四平圓與內方若十一與七

圓內容方之餘

即四小  
弧矢形

若七與四圓外餘方

即四角  
減弧矢

若

十一與三准此則餘圓

即小  
弧矢

與餘方若四與三而小弧



矢與其所減之餘方角若一與七五亦若四與三也

歷算全書卷五十八